Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Μαθηματικό σύστημα

Ένα **μαθηματικό σύστημα** αποτελείται από **αξιώματα**, **ορισμούς**, **μη καθορισμένες έννοιες** και **θεωρήματα**.

Η Ευκλείδειος γεωμετρία αποτελεί ένα μαθηματικό σύστημα.

Μαθηματικό σύστημα

Ένα **αξίωμα** είναι μια πρόταση που θεωρείται πάντοτε αληθής.

Παραδείγματα αξιωμάτων είναι τα εξής:

(α) Από δύο διακεκριμένα σημεία περνάει πάντοτε μια ευθεία.

(β) Ένα επίπεδο καθορίζεται από τρία διακεκριμένα σημεία

Μαθηματικό σύστημα

Ένας **ορισμός** καθορίζει μια νέα έννοια με βάση προηγούμενες έννοιες.

Παραδείγματα ορισμών είναι τα εξής:

(α) Δύο γωνίες καλούνται *συμπληρωματικές* αν το άθροισμά τους είναι 90^{o}. (Η νέα έννοια είναι αυτή των συμπληρωματικών γωνιών).

(β) *Απόλυτος τιμή* ενός πραγματικού αριθμού x καλείται ο x αν αυτός είναι θετικός, ή ο (–x) στην αντίθετη περίπτωση. (Η νέα έννοια είναι αυτή της απόλυτης τιμής).

Μαθηματικό σύστημα

Μια έννοια μπορεί να μην καθορίζεται από ένα ορισμό (**μη καθορισμένη έννοια**), αλλά με έμμεσο τρόπο μέσω των ιδιοτήτων της που αναφέρονται σε κάποια αξιώματα.
Για παράδειγμα, οι έννοιες του σημείου ή της ευθείας δεν ορίζονται με βάση κάποιο ορισμό.

Μαθηματικό σύστημα

Ένα **θεώρημα** είναι μια πρόταση που αποδεικνύεται (με βάση ορισμούς, αξιώματα και άλλα θεωρήματα) αληθής.

Ειδικοί τύποι θεωρημάτων είναι τα **λήμματα** και οι **προτάσεις**.

Παραδείγματα θεωρημάτων είναι τα εξής:

- Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε και οι γωνίες απέναντι των πλευρών αυτών είναι ίσες.
- Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους. (Είναι πρόταση που απορρέει από το παραπάνω θεώρημα).
- Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Μια διαδικασία (ή επιχειρηματολογία) που δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής (επαληθεύει την πρόταση) καλείται **αποδεικτική διαδικασία**.

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Τα θεωρήματα έχουν συνήθως την εξής μορφή:

Για κάθε $x_1, x_2, \dots x_\nu$, εάν $\Pi(x_1, x_2, \dots x_\nu)$ τότε $P(x_1, x_2, \dots x_\nu)$

(π)

Για την απόδειξη της έκφρασης αυτής θα πρέπει να δειχθεί ότι η υποθετική πρόταση «εάν $\Pi(x_1, x_2, \dots x_\nu)$ τότε $P(x_1, x_2, \dots x_\nu)$» είναι αληθής για κάθε $(x_1, x_2, \dots x_\nu)$ στο πεδίο αναφοράς .

Για την απόδειξη θεωρούμε τα $x_1, x_2, \dots x_\nu$ μέλη του πεδίου αναφοράς και υποθέτουμε ότι για αυτά ισχύει η $\Pi(x_1, x_2, \dots x_\nu)$. Αν η $\Pi(x_1, x_2, \dots x_\nu)$ είναι ψευδής, τότε από τον ορισμό της υποθετικής πρότασης, η π είναι αληθής.

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Η **άμεση αποδεικτική διαδικασία** υποθέτει την αλήθεια της $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ και χρησιμοποιώντας ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα αποδεικνύει ενδιάμεσα αποτελέσματα έως ότου δειχθεί η αλήθεια της πρότασης $P(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς δ_1, δ_2, δ, και x ότι:

Αν $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ και $x \le \delta$, τότε $x \le \delta_1$ και $x \le \delta_2$.

Απόδειξη?

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Απαγωγή σε άτοπο: θεωρούμε ότι η υπόθεση $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ του θεωρήματος είναι αληθής και το $P(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ ψευδές. Η χρήση των $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$, $\neg P(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$, θεωρημάτων, αξιωμάτων και ορισμών οδηγεί σε πρόταση της μορφής $(\sigma \wedge \neg\sigma)$, δηλαδή σε άτοπο. Το άτοπο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι αρχικές μας υποθέσεις ήταν ψευδείς. Δηλαδή:

(α) είτε η $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ είναι ψευδής, είτε

(β) η $P(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ αληθής.

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, η υποθετική πρόταση (π) του γενικευμένου θεωρήματος που διατυπώθηκε παραπάνω είναι αληθής.

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Απαγωγή σε άτοπο:

Η απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο μπορεί να αιτιολογηθεί από το γεγονός ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\Pi \to P$$

$$\Pi \wedge \neg P \to (\sigma \wedge \neg \sigma)$$

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς δ_1, δ_2, ισχύει ότι:

Αν $(\delta_1 + \delta_2) \geq 2$ τότε $\delta_1 \geq 1$ ή $\delta_2 \geq 1$.

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Έστω ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν η έκφραση Π(ν) είναι αληθής ή ψευδής.

Αν ισχύουν τα εξής:

(α) η Π(1) είναι αληθής, και

(β) αν η Π(κ) είναι αληθής για κάθε κ<(ν+1), τότε η Π(ν+1) είναι αληθής,

τότε ισχύει ότι

η Π(ν) είναι αληθής για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Η υπόθεση (α) καλείται **βασικό βήμα** και η υπόθεση (β) καλείται **επαγωγικό βήμα**.

Αποδεικτικές Διαδικασίες και Μαθηματική Επαγωγή.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι για ν=1,2,..., $\nu! \geq 2^{\nu-1}$.

Απόδειξη.

Βασικό βήμα: Για ν=1, ισχύει ότι $1! \geq 2^{1-1}$, δηλαδή $1 \geq 1$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δειχθεί ότι αν ισχύει η ($\kappa! \geq 2^{\kappa-1}$), κ=1,2,...,ν, τότε η ($(\nu+1)! \geq 2^{\nu}$) είναι αληθής.

Πράγματι,

$(\nu+1)! = (\nu+1)\nu!$ (1).

Δεδομένου ότι $\nu! \geq 2^{\nu-1}$, από την (1) προκύπτει ότι

$(\nu+1)! = (\nu+1)\nu! \geq (\nu+1)\, 2^{\nu-1} \geq 2 \cdot 2^{\nu-1}$ (αφού ν=1,2,... , $\nu+1 \geq 2$)

Επομένως, $(\nu+1)! \geq 2^{\nu}$.

Παράδειγμα

Οι **κώδικες Gray** έχουν χρησιμοποιηθεί σε διάφορα πλαίσια εφαρμογής όπως για τη μετατροπή αναλογικής σε ψηφιακή πληροφορία.

Ένας κώδικας Gray ορίζεται ως μια ακολουθία

$$S_1, S_2, \ldots, S_{2^n},$$

για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Ο κάθε S_κ είναι ένας δυαδικός αριθμός n ψηφίων
- Κάθε δυαδικός αριθμός n ψηφίων εμφανίζεται στην ακολουθία στοιχείων
- S_κ, $S_{\kappa+1}$, διαφέρουν ακριβώς σε ένα δυαδικό ψηφίο, $\kappa=1,\ldots,2^n-1$.
- S_{2^n}, S_1 διαφέρουν ακριβώς σε ένα δυαδικό ψηφίο.

Παραδείγματος συνέχεια

Η **κατασκευή των κωδικών Gray** γίνεται ως εξής:

Έστω G_1 να είναι η ακολουθία 0,1. Η ακολουθία $G_ν$ κατασκευάζεται από την ακολουθία $G_{ν-1}$ σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία:

(α) Έστω $G^R_{ν-1}$ η ακολουθία $G_{ν-1}$ ανεστραμμένη.

(β) Έστω $G'_{ν-1}$ η ακολουθία στην οποία κάθε δυαδικός αριθμός της $G_{ν-1}$ εμφανίζεται με ένα 0 στην αρχή.

(γ) Έστω $G''_{ν-1}$ η ακολουθία στην οποία κάθε δυαδικός αριθμός της $G^R_{ν-1}$ εμφανίζεται με ένα 1 στην αρχή.

(δ) Η ακολουθία $G_ν$ είναι η ακολουθία αριθμών της $G'_{ν-1}$ ακολουθούμενη από την ακολουθία $G''_{ν-1}$.

Παραδείγματος συνέχεια

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι ακολουθίες G_2 και G_3 κατασκευάζονται ως εξής:

G_1	:	0 1
G^R_1	:	1 0
G'_1	:	00 01
G''_1	:	11 10
G_2	:	00 01 11 10
G^R_2	:	10 11 01 00
G'_2	:	000 001 011 010
G''_2	:	110 111 101 100
G_3	:	000 001 011 010 110 111 101 100

Να δειχθεί ότι η $G_ν$ είναι κώδικας Gray, για κάθε ν.