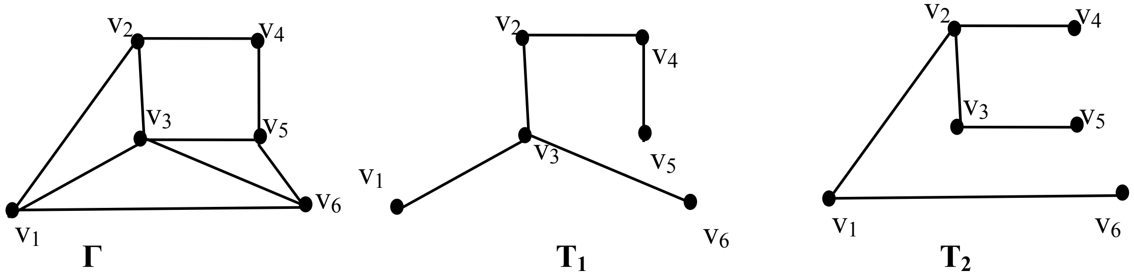
ΣΥΝΔΕΤΙΚΑ ΔΕΝΤΡΑ

Ορισμός. Υπό-γράφημα Τ γραφήματος Γ καλείται **συνδετικό (ή επικαλύπτον) δέντρο (spanning tree)** του Γ εάν αυτό είναι δέντρο και περιέχει όλες τις κορυφές του Γ.

Παράδειγμα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο συνδετικά δέντρα του γραφήματος Γ.



Σχήμα . Συνδετικά δέντρα T_1 και T_2 του γραφήματος Γ

Θεώρημα

Γράφημα Γ έχει συνδετικό δέντρο εάν και μόνο εάν αυτό είναι συνδεόμενο.

Εύρεση ενός συνδετικού δέντρου σε γράφημα Γ

Αλγόριθμος: Κατά-πλάτος διάσχιση γραφήματος

Είσοδος: Συνδεόμενο γράφημα Γ=(V,E) και διάταξη (v_1,v_2,...,v_n) στις κορυφές του.

Έξοδος: Συνδετικό δέντρο T

procedure κατά-πλάτος-διάσχιση(V,E)

/* V = σύνολο κορυφών του Γ; E = σύνολο ακμών του Γ*/

/* V' = σύνολο κορυφών του συνδετικού δέντρου;

E' = σύνολο ακμών του συνδετικού δέντρου*/

/* v_1 ρίζα του συνδετικού δέντρου*/

/* S : διατεταγμένη λίστα κορυφών του τελευταίου επιπέδου του συνδετικού δέντρου. */

S:= (v_1)

V':={ v_1}

E'=∅

while true do

    begin

    Για κάθε x στο S, σύμφωνα με τη διάταξη,

        Για κάθε y στο (V-V'), σύμφωνα με τη διάταξη,

            αν (x,y) είναι μέλος του E, τότε πρόσθεσε το (x,y) στο E' και το y στο V'

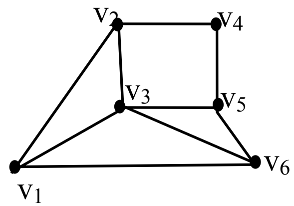
    Αν δεν προστέθηκαν νέες ακμές στο E', τότε return(T)

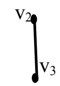
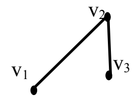
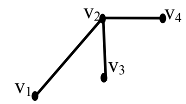
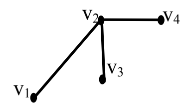
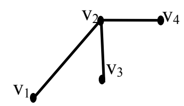
    S:= παιδιά των στοιχείων του S διατεταγμένα σύμφωνα με τη διάταξη των πατέρων τους.

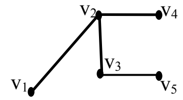
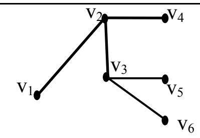
    end

end

Διάταξη κορυφών $(v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_6)$



S	**V’**	**X**	**V-V’**	**Y**	**(X,Y)**	**Συνδετικό Δέντρο**
(v_2)	$\{v_2\}$	v_2	$(v_3, v_1, v_4, v_5, v_6)$	v_3	(v_2, v_3)	
(v_2)	$\{v_2, v_3\}$	v_2	(v_1, v_4, v_5, v_6)	v_1	(v_2, v_1)	
(v_2)	$\{v_2, v_3, v_1\}$	v_2	(v_4, v_5, v_6)	v_4	(v_2, v_4)	
(v_2)	$\{v_2, v_3, v_1, v_4\}$	v_2	(v_5, v_6)	v_5		
(v_2)	$\{v_2, v_3, v_1, v_4\}$	v_2	(v_5, v_6)	v_6		

$\{v_3,v_1,v_4\}$ (τα παιδιά της v_2, διατεταγμένα σύμ-φωνα με την αρχική διάταξη)	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$	v_3	(v_5, v_6)	v_5	(v_3, v_5)	
$\{v_3,v_1,v_4\}$	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$	v_3	(v_6)	v_6	(v_3, v_6)	
$\{v_3,v_1,v_4\}$	$\{v_2,v_3,v_1,v_4\}$		( )			

Αλγόριθμος 5.2: Κατά-βάθος διάσχιση γραφήματος

Είσοδος: Συνδεόμενο γράφημα Γ=(V,E) και διάταξη (v_1,v_2,...,v_n) στις κορυφές του.

Έξοδος: Συνδετικό δέντρο T

procedure κατά-βάθος διάσχιση (V,E)

/* V = σύνολο κορυφών του Γ; E = σύνολο ακμών του Γ*/

/* V' = σύνολο κορυφών του συνδετικού δέντρου;

E' = σύνολο ακμών του συνδετικού δέντρου*/

/* v_1 ρίζα του συνδετικού δέντρου*/

w:= v_1; V':={ v_1}; E'=∅

while true do

begin

while υπάρχει ακμή (w,v) του Γ που η προσθήκη της στο T δεν δημιουργεί κύκλο,

begin

επέλεξε ακμή (w,v_k) με το μικρότερο k (με σεβασμό στη διάταξη των κορυφών του Γ), τέτοια ώστε, η προσθήκη της στο T δεν δημιουργεί κύκλο στο T.

Πρόσθεσε την (w,v_k) στο E' και τη v_k στο V'

w:= v_k

end

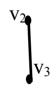
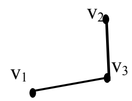
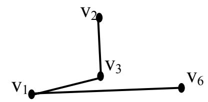
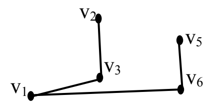
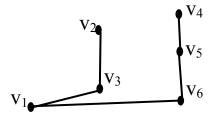
if w = v_1 then return(T)

w := πατέρας της w στο T /* παλινδρόμιση */

end

end

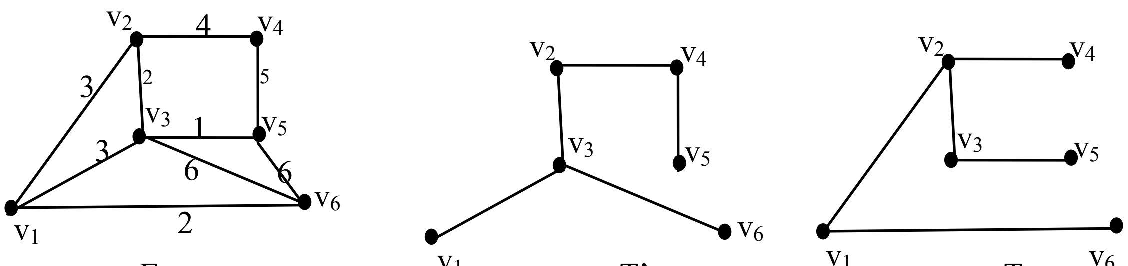
Διάταξη κορυφών $(v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_6)$

w	**V’**	**V-V’**	**(X,Y)**	**Συνδετικό Δέντρο**
v_2	$\{v_2\}$	$(v_3, v_1, v_4, v_5, v_6)$	(v_2, v_3)	
v_3	$\{v_2, v_3\}$	(v_1, v_4, v_5, v_6)	(v_3, v_1)	
v_1	$\{v_2, v_3, v_1\}$	(v_4, v_5, v_6)	(v_2, v_6)	
v_6	$\{v_2, v_3, v_1, v_6\}$	(v_4, v_5)	(v_6, v_5)	
v_5	$\{v_2, v_3, v_1, v_6, v_5\}$	(v_4)	(v_5, v_4)	

Ορισμός (εκτός ύλης τελικής εξέτασης)

Έστω Γ γράφημα με βάρη. Ένα **ελάχιστο συνδετικό δέντρο (minimum spanning tree)** του Γ είναι ένα συνδετικό δέντρο του Γ με ελάχιστο βάρος (άθροισμα των βαρών των ακμών του).

Παράδειγμα. Έστω ο γράφος Γ του παρακάτω σχήματος. Το δέντρο T' είναι ένα συνδετικό δέντρο του γράφου Γ, με βάρος 20. Το T' δεν είναι ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο για τον Γ, αφού το συνδετικό δέντρο T έχει βάρος 12.



Γ T’ T

(α) (β) (γ)

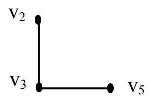
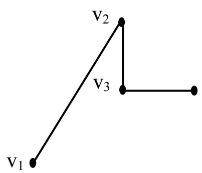
Αλγόριθμος: Αλγόριθμος Prim για την εύρεση του ελάχιστου συνδετικού δέντρου σε γράφημα με βάρη.

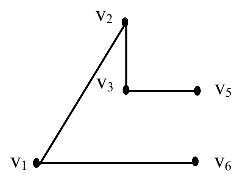
Είσοδος: Ένα συνδεόμενο γράφημα με βάρη, κορυφές 1,...,n, και αρχική κορυφή u. Αν (i,j) ακμή, το βάρος της ακμής (i,j) συμβολίζεται ως w(i,j); αν ή (i,j) δεν είναι ακμή, τότε το w(i,j) είναι ίσο με ∞.

Έξοδος: Το σύνολο των ακμών E του ελάχιστου συνδετικού δέντρου (mst).

```
procedure prim(w,n,u)
/* v(i) = 1 αν η κορυφή i υπάρχει ήδη στο ελάχιστο συνδετικό δέντρο*/
/* v(i)=0 αν η κορυφή i δεν έχει προστεθεί στο υπό-κατασκευή ελάχιστο συνδετικό δέντρο   */

for i:=1 to n do
        v(i) := 0
v(u) :=1
E:=∅
For i:=1 to (n-1)
        begin
        min:= ∞
        for j:=1 to n do
                if v(j)=1 then
                        for k=1 to n do
                        if v(k) = 0 and w(j,k)<min then
                                begin
                                add_vertex:=k
                                e:=(j,k)
                                min:=w(j,k)
                                end
        v(add_vertex):=1
        E:= E∪{e}
        end
       return(E)
end
```

Κορυφές του υπό-κατασκευή δέντρου	**Βάρη των υποψήφιων ακμών**	**Συνδετικό δέντρο**
$\{v_2\}$	$w(v_2, v_4)=4$ $w(v_2, v_3)=2$ √ $w(v_2, v_1)=3$	
$\{v_2, v_3\}$	$w(v_2, v_4)=4$ $w(v_2, v_1)=3$ $w(v_3, v_1)=3$ $w(v_3, v_5)=1$ √ $w(v_3, v_6)=6$	
$\{v_2, v_3, v_5\}$	$w(v_2, v_4)=4$ $w(v_2, v_1)=3$√ $w(v_3, v_1)=3$ $w(v_3, v_6)=6$ $w(v_5, v_4)=4$ $w(v_5, v_6)=3$	

Κορυφές του υπό-κατασκευή δέντρου	**Βάρη των υποψήφιων ακμών**	**Συνδετικό δέντρο**
$\{v_2, v_3, v_5, v_1\}$	$w(v_2, v_4)=4$ $w(v_3, v_6)=6$ $w(v_5, v_4)=4$ $w(v_5, v_6)=3$ $w(v_1, v_6)=2\surd$	
$\{v_2, v_3, v_5, v_1, v_6\}$	$w(v_2, v_4)=4\surd$ $w(v_5, v_4)=4$