Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Σχολή Θετικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Στοχαστική Ανάλυση – 4η Άσκηση

Διδάσκουσα: Ελισάβετ Κωνσταντίνου, Επικ. Καθηγήτρια

Ζήτημα 1 (2 μονάδες) Έστω $\{Y_n, n=1,2,...\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli με $P(Y_n=1) = 0.6$ και $P(Y_n=0) = 0.4$. Για $n=2,3,...$ ορίζουμε μια νέα ακολουθία

$$X_n = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad Y_{n-1} = Y_n = 1 \\ 1 & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι αυτή **δεν** είναι αλυσίδα Markov.

Ζήτημα 2 (2 μονάδες) Έστω μια μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις {0,1,2,3,4,5} και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης τον:

$$P = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

α) Σχηματίστε το γράφημα της αλυσίδας. Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της αλυσίδας; Ποιες καταστάσεις είναι έμμονες, ποιες μεταβατικές και ποιες απορροφητικές; Ποια είναι η περίοδος των έμμονων καταστάσεων;

β) Αν υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 1, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρεθεί σε μία έμμονη κατάσταση;

Ζήτημα 3 (2 μονάδες) Σε ένα κουτί έχουμε συνολικά N άσπρες και μαύρες μπάλες. Κάθε χρονική στιγμή επιλέγεται μια μπάλα από το κουτί και αντικαθίσταται είτε από μία άσπρη με πιθανότητα p, $0 < p < 1$ ή από μία μαύρη με πιθανότητα $1-p$. Έστω X_n το πλήθος των άσπρων μπαλών στο κουτί τη χρονική στιγμή n.

1) Εξηγήστε γιατί η διαδικασία $\{X_n, n=0,1,2,...\}$ αποτελεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Δώστε το γράφημα της αλυσίδας, προσδιορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας της και βρείτε την περίοδό τους.

2) Υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης πρώτης τάξης.

3) Αν $N = 2$ βρείτε το ποσοστό του χρόνου που δαπανάται σε κάθε κατάσταση.

4) Αν η πιθανότητα $p = 1$, αλλάζουν οι κλάσεις ισοδυναμίας της αλυσίδας; Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι το κουτί να περιέχει μόνο άσπρες μπάλες αν υποθέσουμε ότι αρχικά είχε μία άσπρη και τρεις μαύρες;

Ζήτημα 4 (2 μονάδες) Τέσσερα παιδιά, έστω Α, Β, Γ και Δ, έχουν μια μπάλα και παίζουν το εξής παιχνίδι: σε κάθε φάση του παιχνιδιού, το παιδί που έχει τη μπάλα τη ρίχνει τυχαία σε κάποιο άλλο. Έστω X_0 το παιδί που έχει αρχικά τη μπάλα και X_n, n=1,2,3,... το παιδί που έχει τη μπάλα μετά τη n-οστή φάση του παιχνιδιού.

(α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω παιχνίδι με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και υπολογίστε τον πίνακα μετάβασης πρώτης τάξης.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα $P\{X_2 = A | X_0 = A\}$ και ποια η $P\{X_2 = A\}$ αν είναι το ίδιο πιθανό αρχικά την μπάλα να την έχει οποιοδήποτε παιδί;

(γ) Υπάρχουν οριακές πιθανότητες για τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας που προέκυψε από την μοντελοποίησή σας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Αν είναι θετική, υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες.

Ζήτημα 5 (2 μονάδες) Ένας φυλακισμένος έχει 3 δολάρια και μπορεί να βγει από τη φυλακή αν αποκτήσει 8 δολάρια. Ο δεσμοφύλακάς του αποφασίζει να παίξει μαζί του μια σειρά στοιχημάτων. Σε κάθε στοίχημα ο φυλακισμένος μπορεί να ποντάρει Α δολάρια και κερδίζει Α δολάρια με πιθανότητα 0.4 (άρα χάνει Α δολάρια με πιθανότητα 0.6). Ποια η πιθανότητα να αποφυλακιστεί αν:

α) κάθε φορά ποντάρει μόνο 1 δολάριο

β) κάθε φορά ποντάρει όσα περισσότερα μπορεί, αρκεί να μην ξεπερνάει τα 8 δολάρια αν κερδίσει (π.χ. αν έχει 5 δολάρια θα ποντάρει 3 δολάρια για να φτάσει τα 8)

Παράδοση: Η εργασία θα παραδοθεί τη Δευτέρα 12 Ιανουαρίου κατά τη διάρκεια του μαθήματος (15:00 - 18:00). Όσοι επιθυμούν να στείλουν την εργασία ηλεκτρονικά, θα πρέπει μέχρι την Κυριακή 11 Ιανουαρίου και ώρα 15:00 να την έχουν αποστείλει στην ηλεκτρονική διεύθυνση της διδάσκουσας.

Καλή Επιτυχία!