



**Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων**

**Σχολή Θετικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου**

**Στοχαστική Ανάλυση – 2<sup>η</sup> Άσκηση**

**Διδάσκουσα: Ελισάβετ Κωνσταντίνου, Επικ. Καθηγήτρια**

**Υπεύθυνος Φροντιστηρίου: Γεώργιος Φωτιάδης, Υπ. Διδάκτορας**

---

**Ζήτημα 1 (2.1 μονάδες)** Έχει παρατηρηθεί ότι σε μια ηλεκτρονική διεύθυνση τα άχρηστα μηνύματα (spam) φτάνουν σύμφωνα με στοχαστική διαδικασία Poisson  $N_1(t)$  με παράμετρο  $\lambda_1 = 20$  μηνύματα ανά ώρα, ενώ τα κανονικά μηνύματα φθάνουν σύμφωνα με στοχαστική διαδικασία Poisson  $N_2(t)$  με παράμετρο  $\lambda_2 = 10$  μηνύματα ανά ώρα. Έστω  $N(t)$  ο αριθμός των συνολικών μηνυμάτων που φθάνουν σε χρόνο  $t$ . Να υπολογιστούν αναλυτικά οι πιθανότητες

α)  $P\{N(1/3) = 5, N(1) = 25 \mid N(2) = 75\}$

β)  $P\{N_1(1/2) = 5 \mid N(1/2) = 15\}$

γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ 2 κανονικών μηνυμάτων να είναι το πολύ 6 λεπτά;

**Ζήτημα 2 (2.1 μονάδες)** Σε σταθμό βενζίνης φτάνουν κατά μέσο όρο 20 πελάτες ανά ώρα.

α) Ποια η πιθανότητα σε 15 λεπτά να φτάσει μόνο ένας πελάτης;

β) Ποια η πιθανότητα μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων να περάσουν τουλάχιστον 3 λεπτά;

γ) Αν η ποσότητα σε λίτρα που βάζει ένας πελάτης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 20 και ο σταθμός κερδίζει 0.02 ευρώ ανά λίτρο, ποιο το αναμενόμενο κέρδος του πρατηρίου σε διάστημα 12 ωρών;

**Ζήτημα 3 (2.4 μονάδα).** Οι αφίξεις πελατών σε ένα κατάστημα αποτελούν διαδικασία Poisson. Ο μέσος χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων είναι 90 δευτερόλεπτα. Το 75% των πελατών είναι γυναίκες.

α) Ποια η πιθανότητα να μην εμφανιστεί κανένας πελάτης σε ένα πεντάλεπτο;

β) Έστω ότι μπαίνουν 10 πελάτες στο κατάστημα. Ποια η πιθανότητα από τους 10 οι 4 να είναι άνδρες;

γ) Ποια η πιθανότητα σε ένα πεντάλεπτο να έχουμε ακριβώς 4 γυναίκες και 2 άνδρες πελάτες;

δ) Δεδομένου ότι δεν έχει εμφανιστεί άνδρας πελάτης τα τελευταία 5 λεπτά, υπολογίστε την πιθανότητα ότι δεν θα έρθει κανένας άνδρας και στα επόμενα 5 λεπτά.

**Ζήτημα 4 (1.3 μονάδες)** Δύο πομποί A και B στέλνουν μηνύματα σε έναν κοινό δέκτη σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς  $\lambda_A$  και  $\lambda_B$  αντίστοιχα. Τα μηνύματα είναι τόσο σύντομα που μπορούμε να υποθέσουμε ότι καταλαμβάνουν σημεία στον άξονα του χρόνου. Ο αριθμός των λέξεων σε κάθε μήνυμα (ανεξάρτητα από τον πομπό προέλευσης) είναι μια τυχαία μεταβλητή  $W$  με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_w(w) = \begin{cases} 2/6 & \text{αν } w=1 \\ 3/6 & \text{αν } w=2 \\ 1/6 & \text{αν } w=3 \\ 0 & \text{αλλιως} \end{cases}$$

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι συνολικά 9 μηνύματα λαμβάνονται στο δέκτη σε χρονικό διάστημα  $t$ ;
- (β) Έστω  $X$  ο χρόνος από τη στιγμή  $t=0$  μέχρι ο δέκτης να λάβει 8 μηνύματα μήκους 3 από τον Α. Ποια η μέση τιμή του  $X$ ;

**Ζήτημα 5 (2.1 μονάδες).** Ένας εργάτης κάθεται μπροστά από έναν ταινιόδρομο και πρέπει να αφαιρεί από αυτόν αντικείμενα καθώς αυτά περνούν από μπροστά του. Παρατηρεί ότι η πιθανότητα με την οποία ακριβώς  $n$  αντικείμενα φτάνουν σε ένα λεπτό δίνεται από τη σχέση  $P\{N = n\} = \frac{2^n e^{-2}}{n!}$

και συνεπώς υποθέτει ότι οι αφίξεις ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Poisson.

- (α) Αν θελήσει να κάνει για λίγο ένα διάλειμμα, πόσο χρόνο μπορεί να λείπει ώστε ο μέσος αριθμός των αντικειμένων που θα περάσουν χωρίς συλλογή να είναι μικρότερος από 5;
- (β) Αν λείπει για 2 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 3 αντικείμενα;
- (γ) Αν λείπει για 2 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 2 αντικείμενα στο πρώτο λεπτό και 1 αντικείμενο στο δεύτερο λεπτό;

**Παράδοση:** Η εργασία θα παραδοθεί τη Δευτέρα 8 Δεκεμβρίου, την 1<sup>η</sup> ώρα του μαθήματος (15:00-16:00). Καμία εργασία δεν θα γίνει δεκτή μετά το πέρας του μαθήματος. Όσοι επιθυμούν να στείλουν την εργασία ηλεκτρονικά, θα πρέπει μέχρι την Κυριακή 7 Δεκεμβρίου και ώρα 15:00 να την έχουν αποστείλει στην ηλεκτρονική διεύθυνση της διδάσκουσας.

**Καλή Επιτυχία!**