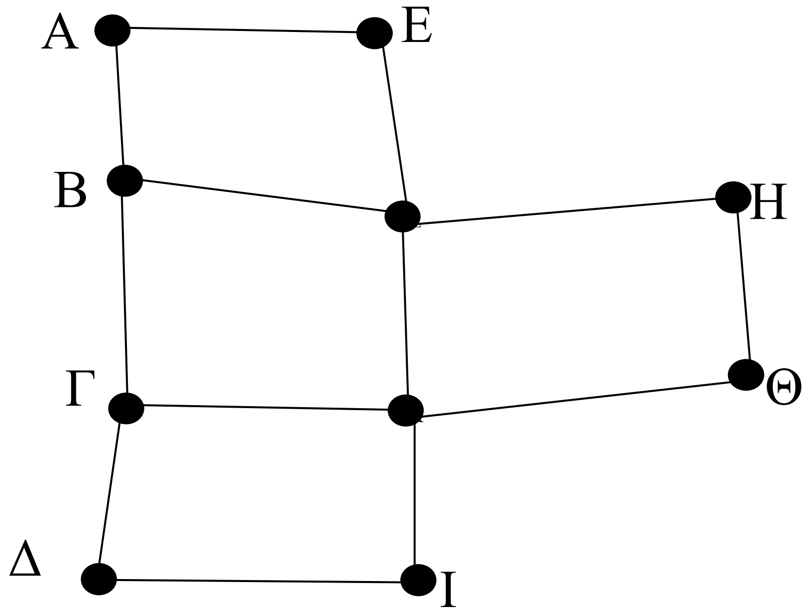
Γραφήματα

ΒΑΣΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ : ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΙ

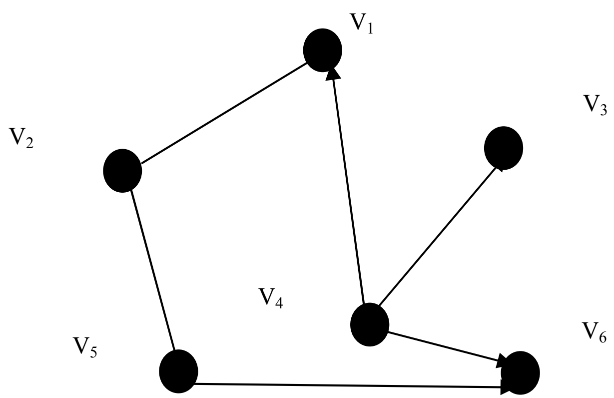


Ορισμός

Ένα (μη κατευθυνόμενο) **γράφημα (non-directed graph)** Γ, είναι μία δυάδα από σύνολα Ε και V και συμβολίζεται με Γ=(Ε,V). Το σύνολο V είναι το σύνολο κορυφών του γραφήματος, και Ε το σύνολο των ακμών του γραφήματος. Κάθε ακμή ε του γραφήματος ($\varepsilon \in E$), συνδέει δύο κορυφές v_1 και v_2 του συνόλου V. Μία τέτοια ακμή συμβολίζεται $\varepsilon=(v_1,v_2)$ ή $\varepsilon=(v_2,v_1)$.

Ορισμός

Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph)** Γ, αποτελείται από δύο σύνολα, E και V και συμβολίζεται με Γ=(E,V). Το σύνολο V είναι το σύνολο κορυφών του γραφήματος, και E το σύνολο των ακμών του γραφήματος. Κάθε ακμή ε στο E σχετίζεται με ένα διατεταγμένο σύνολο κορυφών v_1,v_2. Μία τέτοια ακμή συμβολίζεται $ε=(v_1,v_2)$ και συμβολίζει μία ακμή από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_2.



Ορισμός

Μία ακμή $\varepsilon=(v_1,v_2)$ σε κατευθυνόμενο ή μη γράφημα λέγεται ότι **εφάπτεται (incident on)** των κορυφών v_1 και v_2. Οι κορυφές v_1 και v_2 λέγονται **γειτονικές ή διαδοχικές (adjacent)**.

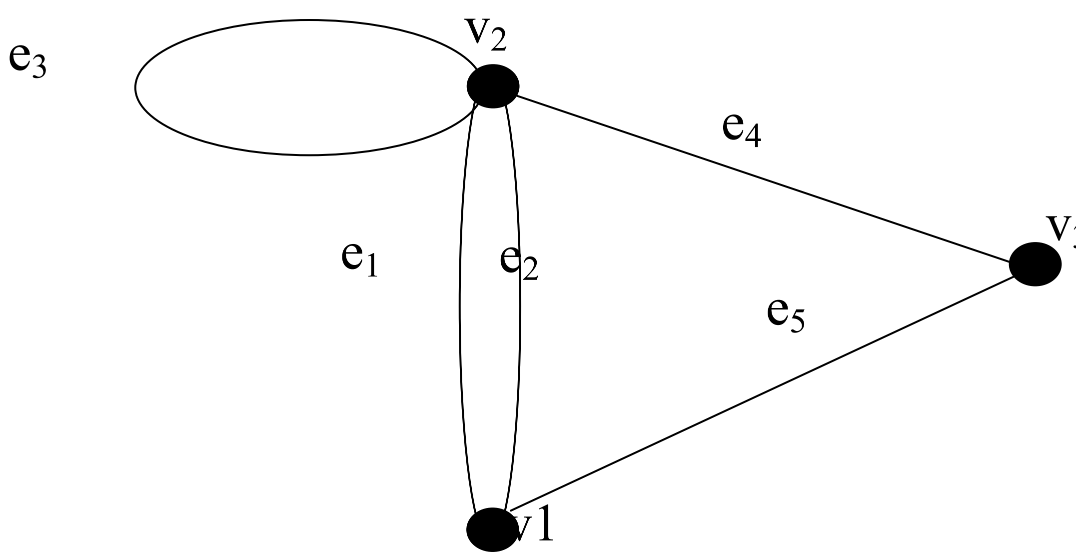
Ορισμός

Εάν σε ένα *μη κατευθυνόμενο* γράφημα Γ υπάρχουν περισσότερες από μια ακμές που συνδέουν δύο κορυφές v_1 και v_2, τότε οι ακμές αυτές καλούνται **παράλληλες (parallel edges).**

Ορισμός

Ένα γράφημα Γ δίχως ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές καλείται **απλό γράφημα (simple graph).**

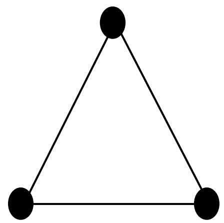
Μία κορυφή στην οποία δεν εφάπτεται καμία ακμή καλείται **μεμονωμένη κορυφή (isolated vertex).**


e3
v2
e4
v3
e1
e2
e5
v1

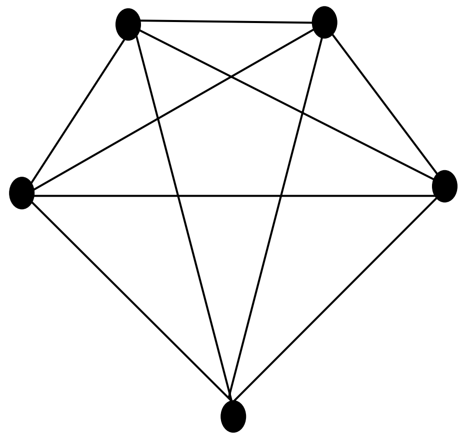
Ειδικές κατηγορίες γραφημάτων

Ορισμός

Ένα γράφημα Γ καλείται **πλήρες με ν κορυφές (complete with ν vertices),** και συμβολίζεται $K_ν$, εάν είναι απλό με ν κορυφές και για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κορυφών v_1, $v_2 \in V$, υπάρχει μία ακμή στο E με $e=(v_1,v_2)$.



K_3



K_5

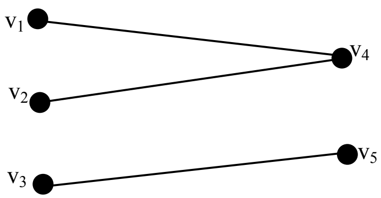
Ορισμός

Ένα γράφημα Γ=(V,E) καλείται **διχοτομίσιμο (bipartite graph)** εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα V_1 και V_2 τέτοια ώστε κάθε ακμή e στο E εφάπτεται σε μία κορυφή του V_1 και σε μια του V_2.

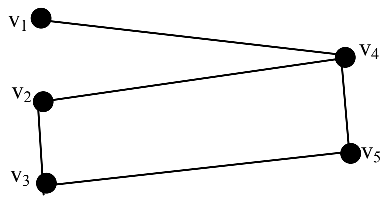
Παράδειγμα

(α) Παράδειγμα διχοτομίσιμου γραφήματος με $V_1=(v_1,v_2,v_3)$ και $V_2=(v_4,v_5)$

είναι αυτό του σχήματος 4.6(α). Σημειώστε ότι η ακμή (v_1,v_5) δεν υπάρχει.



(α)

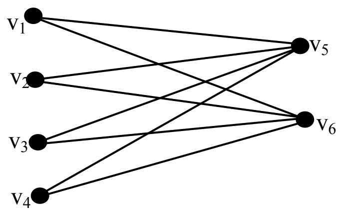


(β)

Ορισμός

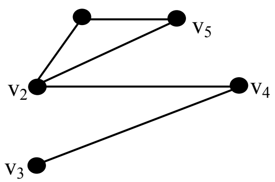
Πλήρες και διχοτομίσιμο γράφημα με ν και μ κορυφές (**complete and bipartite** with ν and μ vertices) , συμβολίζεται ως $K_{\nu,\mu}$, είναι ένα διχοτομίσιμο γράφημα, το σύνολο κορυφών του οποίου διαμερίζεται σε δύο σύνολα κορυφών: V_1, με ν κορυφές και V_2 με μ κορυφές, τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών (v_1, v_2), με $v_1 \in V_1$ και $v_2 \in V_2$, υπάρχει μία ακμή που εφάπτεται σε αυτές.

Παράδειγμα πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος $K_{2,4}$ με δύο και τέσσερις κορυφές φαίνεται στο σχήμα 4.7:

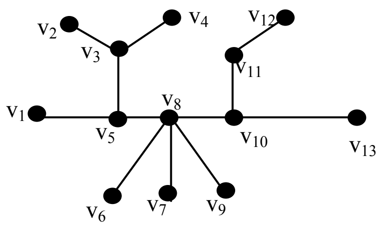


Παράδειγμα πλήρους και διχοτομίσιμου γραφήματος

Να καθοριστεί ποια από τα γραφήματα του σχήματος 4.8 είναι διχοτομίσιμα. Σε περίπτωση που είναι διχοτομίσιμα, να ορίσετε τη διαμέριση του συνόλου των κορυφών.



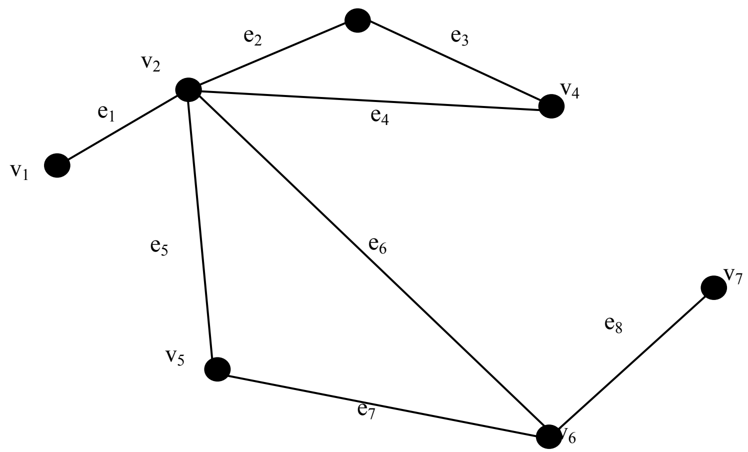
Γ1



Γ2

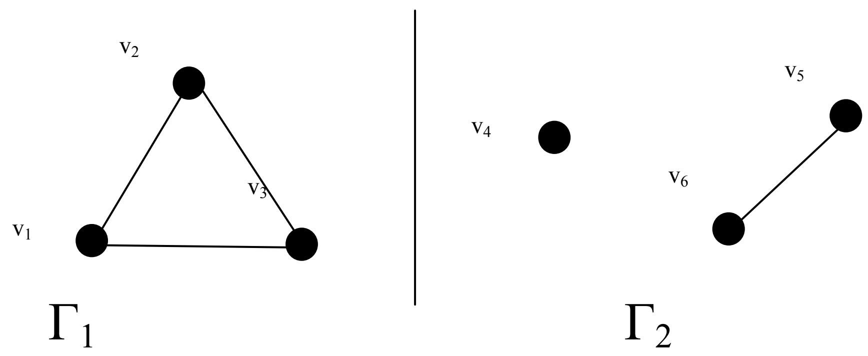
Μ**ονοπάτι (path)** P μήκους ν από μία κορυφή v_0 σε μια κορυφή v_n σε γράφημα Γ=(V,E), $v_0, v_n \in V$, καλείται μία ακολουθία από ν+1 κορυφές και ν ακμές, όπου οι ακμές εναλλάσσονται των κορυφών ξεκινώντας από την κορυφή v_0 και καταλήγοντας στην κορυφή v_n. Δηλαδή, $P=(v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots\ldots,e_n,v_n)$, όπου κάθε ακμή e_i εφάπτεται των κορυφών v_{i-1}, v_i, με $1 \le i \le n$.

Το μονοπάτι ($v_1,e_1, v_2,e_2, v_3,e_3, v_4,e_4, v_2$) στο παρακάτω γράφημα είναι ένα μονοπάτι μήκους 4 από την κορυφή v_1 στην κορυφή v_2.



Ένα γράφημα Γ=(V,E) καλείται **συνδεόμενο (connected graph)** εάν για κάθε ζευγάρι κορυφών v_1,v_2 στο V υπάρχει ένα μονοπάτι από τη v_1 στη v_2.

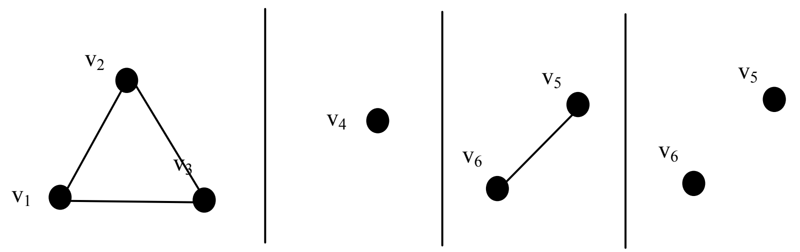
Παράδειγμα Το γράφημα $Γ_1$ του παράτω σχήματος είναι συνδεόμενο, ενώ το γράφημα $Γ_2$ είναι μη-συνδεόμενο διότι δεν υπάρχει μονοπάτι από τη κορυφή v_2 στη κορυφή v_5.



Έστω Γ=(V,E) ένα γράφημα. Το γράφημα Γ'=(V',E') καλείται **υπό-γράφημα (sub-graph)** του Γ εάν,

- $V' \subseteq V$,
- $E' \subseteq E$ και
- για κάθε $e \in E'$, η e εφάπτεται σε δύο κορυφές που ανήκουν στο V'.

Τα γραφήματα που απεικονίζονται παράτω είναι υπο-γραφήματα του γραφήματος Γ2 παραπάνω.



Έστω Γ=(V,E) ένα γράφημα, και v μία κορυφή του Γ. Το υπό-γράφημα του Γ που αποτελείται από όλες τις ακμές και κορυφές που ανήκουν σε οποιοδήποτε μονοπάτι που ξεκινάει από την v, καλείται **τμήμα του γραφήματος (part of the graph) Γ που περιέχει τη v**.

Ειδικού τύπου μονοπάτια

Απλό μονοπάτι (**simple path**) σε γράφημα Γ καλείται μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές.

Κύκλος (**cycle**) σε γράφημα Γ είναι μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες ακμές, όπου η αρχική και η τελική κορυφές συμπίπτουν.

Απλός κύκλος (simple cycle) σε γράφημα Γ είναι κύκλος δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές (εκτός βέβαια της αρχικής και τελικής κορυφής).

Η ακολουθία Fibonacci, όπως έχει αναφερθεί, ορίζεται ως εξής:

$f_1 = 1$

$f_2 = 2$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$.

Να δειχθεί ότι ο αριθμός των μονοπατιών από τη v_1 στη v_1 μήκους ν στο γράφημα του παρακάτω σχήματος, είναι ίσος με τον ν-οστό αριθμό Fibonacci f_ν.