ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Ποιές από τις ακόλουθες εκφράσεις είναι είτε αληθής είτε ψευδής (αλλά όχι και τα δύο);

1.Ο αριθμός 4 διαιρείται με το 2.

2.Ο αριθμός 5 διαιρείται μόνο με το 5 και το 1.

3.Ο Ντε Γκώλ πήρε το Νόμπελ Λογοτεχνίας.

4.Για κάθε ακέραιο κ υπάρχει πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του κ.

5.Βρες μου το τηλέφωνο του Γιώργου

6.Θα έπρεπε να βρέχει

Πρόταση

Μια έκφραση η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ψευδής ή αληθής, αλλά όχι και τα δύο, καλείται **πρόταση**.

Οι προτάσεις αποτελούν στοιχειώδεις δομές της μαθηματικής λογικής.

Για το **συμβολισμό προτάσεων** θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα

π, ρ, τ

Αν θέλουμε να επισημάνουμε μια πρόταση με ένα από τα παραπάνω γράμματα, θα ακολουθούμε το συμβολισμό:

Ο αριθμός 5 διαιρείται μόνο με το 5 και το 1 (π)

Τιμή αληθείας πρότασης

Αν η πρόταση π είναι αληθής, τότε η τιμή αληθείας της είναι «αληθής» (συμβολίζεται T).
Στην αντίθετη περίπτωση, θα είναι «ψευδής» (συμβολίζεται F).

Για παράδειγμα, η πρόταση (π) παραπάνω, έχει τιμή αληθείας T.

Συνδυασμός προτάσεων

Προτάσεις που προκύπτουν από το συνδυασμό απλούστερων προτάσεων καλούνται **σύνθετες προτάσεις**.
Προτάσεις που δεν είναι σύνθετες καλούνται **απλές**.

Ο συνδυασμός προτάσεων γίνεται με τη χρήση **λογικών συνδετικών** που αντιστοιχούν σε συνδέσμους και προσδιορισμούς που χρησιμοποιούμε στο φυσικό λόγο, όπως «και», «ή», «δεν».

Τιμή αληθείας συνδυασμών προτάσεων

Ο **πίνακας αληθείας** σύνθετης πρότασης π, που προκύπτει από συνδυασμό προτάσεων $π_1$, $π_2$, ... $π_ν$, παραθέτει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αληθείας των προτάσεων $π_1$, $π_2$, ... $π_ν$, και για κάθε τέτοιο συνδυασμό, την τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης π.

Σύζευξη προτάσεων

Η **σύζευξη προτάσεων** π και ρ συμβολίζεται **π ∧ ρ**, και διαβάζεται «π και ρ».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης π ∧ ρ καθορίζεται από τον πίνακα αληθείας

π	ρ	π ∧ ρ
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Διαζευξη προτάσεων

Η **διάζευξη προτάσεων** π και ρ συμβολίζεται **π ∨ ρ**, και διαβάζεται «π ή ρ».
Η τιμή *αληθείας* της σύνθετης πρότασης π ∨ ρ καθορίζεται *από* τον πίνακα *αληθείας*:

π	ρ	π ∨ ρ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Άρνηση Πρότασης

Η **άρνηση πρότασης** π συμβολίζεται **¬ρ**, και διαβάζεται «δεν ισχύει ότι «ρ» ».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης **¬ρ** καθορίζεται από τον πίνακα:

ρ	¬ρ
T	F
F	T

Υποθετική πρόταση

Η **υποθετική πρόταση** συμβολίζεται **$\pi \to \rho$**, και διαβάζεται «Αν π, τότε ρ». Η πρόταση π καλείται υπόθεση (ή υποτιθέμενο) και η πρόταση ρ καλείται συμπέρασμα (ή συνεπαγόμενο).

Η τιμή *αληθείας* της σύνθετης πρότασης $\pi \to \rho$ καθορίζεται *από* τον *πίνακα*:

π	ρ	$\pi \to \rho$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Παράδειγμα

Θεωρείστε τις εξής δηλώσεις του Γιώργου:

Η Μαρία είναι έξυπνη (π)

Αν η Μαρία είναι έξυπνη, τότε την συμπαθώ (ρ)

Θεωρώντας ότι οι δύο προτάσεις έχουν την ίδια τιμή αληθείας, δείξτε ότι η Μαρία είναι έξυπνη.

Ανεστραμμένη πρόταση

Θεωρείστε την **ανεστραμμένη** πρόταση $\rho \rightarrow \pi$ της υποθετικής πρότασης $\pi \rightarrow \rho$.

Δεδομένου ότι η $(\pi \rightarrow \rho)$ είναι αληθής, μπορεί η $(\rho \rightarrow \pi)$ να είναι ψευδής;

Ταυτολογίες και αντιφάσεις

Μία πρόταση που είναι πάντοτε αληθής καλείται **ταυτολογία**, ενώ μια πρόταση που είναι πάντοτε ψευδής καλείται **αντίφαση**.

Αν και μόνο εάν... (ανν..)

Η σύνθετη πρόταση **«π εάν και μόνο εάν ρ»** ή **«π ανν ρ»** συμβολίζεται π ↔ ρ, και διαβάζεται «π αν και μόνο αν ρ».

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης π ↔ ρ καθορίζεται από τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

π	ρ	π↔ ρ
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Ισοδυναμία προτάσεων

Δύο προτάσεις π και ρ καλούνται **ισοδύναμες**, συμβολίζεται $π \equiv ρ$, αν:

1. Είναι απλές και η τιμή αληθείας της π είναι πάντοτε ίση με την τιμή αληθείας της ρ και αντιστρόφως.
2. Είναι σύνθετες, αποτελούνται από τις προτάσεις $π_1, π_2, \ldots π_ν$, και δεδομένων των τιμών αληθείας των $π_1, π_2, \ldots π_ν$, οι π και ρ έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

Νόμοι του De Morgan

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

(α) $\neg(\pi \vee \varrho) \equiv (\neg \pi) \wedge (\neg \varrho)$

(β) $\neg(\pi \wedge \varrho) \equiv (\neg \pi) \vee (\neg \varrho)$

Ποσοδείκτες

Έστω Π(Χ) έκφραση σχετικά με μια μεταβλητή Χ και Δ ένα σύνολο. Η έκφραση Π(Χ) καλείται **προτασιακή συνάρτηση** στο Δ, αν για κάθε Χ στο Δ, η Π(Χ) είναι πρόταση. Το Δ καλείται **σύμπαν (domain of discourse)**.

Ο Χ είναι ακέραιος (π)

$X^2 + 2X$ είναι άρτιος ακέραιος (ρ)

Ο παίκτης Χ σκόραρε 23 πόντους (τ)

$(2x+1)^2$ είναι άρτιος ακέραιος.

Η μεταβλητή Χ μιας προτασιακής συνάρτησης Π(Χ) καλείται **ελεύθερη μεταβλητή** (ελεύθερη να «κινείται» στο πεδίο *αναφοράς* Δ).

Τις περισσότερες φορές, τις μεταβλητές αυτές τις προσδιορίζουμε με ένα *ποσοδείκτη* λέγοντας ότι η Π(Χ) ισχύει *για κάθε* Χ στο Δ ή *για κάποιο* Χ στο Δ.

Καθολικός Ποσοδείκτης

Έστω Π προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ.

Η (π) καλείται **καθολικά προσδιορισμένη** έκφραση αν είναι της μορφής

$$\forall X, \Pi(X) \quad (\pi)$$

και διαβάζεται «για κάθε Χ, Π(Χ)».

Το σύμβολο $\forall$ καλείται **καθολικός ποσοδείκτης**

Καθολικός ποσοδείκτης

Παράδειγμα

Η καθολικά προσδιορισμένη έκφραση

$\forall X$, Αν $X>1$, τότε $X+1 > 1$

είναι αληθής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Υπαρξιακός ποσοδείκτης

Έστω Π προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ. Η (π) καλείται **υπαρξιακά προσδιορισμένη** έκφραση αν είναι της μορφής

∃Χ, Π(Χ) (π)

και διαβάζεται «υπάρχει Χ, Π(Χ)» ή «για κάποιο Χ, Π(Χ)». Το σύμβολο ∃ καλείται **υπαρξιακός ποσοδείκτης**

Υπαρξιακός ποσοδείκτης (παράδειγμα)

Η υπαρξιακά προσδιορισμένη έκφραση

$\exists X$, Αν $X>1$ τότε $X+1 > 1$

είναι αληθής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Γενικευμένοι κανόνες De Morgan

Π(Χ) = Ο Χ είναι εργαζόμενος

Για τις παρακάτω εκφράσεις

∃Χ, Ο Χ είναι εργαζόμενος (π)

∀Χ, Ο Χ δεν είναι εργαζόμενος (ρ)

Ισχύουν τα εξής:

(α) $\pi = \exists X, \Pi(X)$,

(β) $\rho = \forall X, \neg\, \Pi(X)$, και

(γ) $\pi \leftrightarrow (\neg \rho)$

Γενικευμένοι κανόνες De Morgan

Έστω Π(Χ) προτασιακή έκφραση στο πεδίο αναφοράς Δ. Κάθε ζεύγος προτάσεων που αναφέρονται στα (α) και (β) παρακάτω είναι λογικά ισοδύναμες:

(α) $\neg(\forall X, \Pi(X))$ (π) ,

$\exists X, \neg(\Pi(X))$ (ρ)

(β) $\neg(\exists X, \Pi(X))$ (π)

$\forall X, \neg(\Pi(X))$ (ρ)