Σχέσεις και ιδιότητές τους

Διμελής (binary) σχέση Σ από σύνολο Χ σε σύνολο Υ είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου Χ×Υ. Αν (χ,ψ)∈Σ, λέμε ότι το χ σχετίζεται με το ψ και σημειώνουμε χΣψ.

Στην περίπτωση όπου Χ=Υ, λέμε ότι η Σ είναι διμελής σχέση **επί** του συνόλου Χ.

Π..χ.
Σχέση μεταξύ φοιτητών και μαθημάτων

Η σχέση μεταξύ φοιτητών και μαθημάτων μπορεί να ειδωθεί με τη μορφή ενός πίνακα.

Κάθε γραμμή αυτού του πίνακα είναι μια διατεταγμένη δυάδα (Φ,Μ) στοιχείων των συνόλων Φοιτητής και Μάθημα, αντίστοιχα:

Σχέση «Δήλωση»

Φοιτητής	**Μάθημα**
Γιάννης	Μαθηματικά
Μαίρη	Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα
Νίκος	Λειτουργικά Συστήματα
Κώστας	Δίκτυα
Γιάννης	Δίκτυα

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών διμελούς σχέσης Σ

Το σύνολο $\{\chi \in X \mid (\chi,\psi) \in \Sigma$ για κάποιο ψ στο $\Upsilon\}$ καλείται **πεδίο ορισμού** της Σ,

ενώ

Το σύνολο $\{\psi \in \Upsilon \mid (\chi,\psi) \in \Sigma$ για κάποιο χ στο $X\}$, καλείται **πεδίο τιμών** της Σ.

Παραδείγματα

1. Αν Χ={2,3,4} και Υ={3,4,5}, ορίζουμε τη σχέση Σ από το Χ στο Υ ως εξής:

χ Σ ψ, αν (χ+ψ) είναι άρτιος αριθμός.

2. Αν Χ={1,2,3,4}, ορίζουμε τη σχέση Σ στο Χ ως εξής

$(\chi,\psi) \in \Sigma$, αν $\chi \leq \psi$,

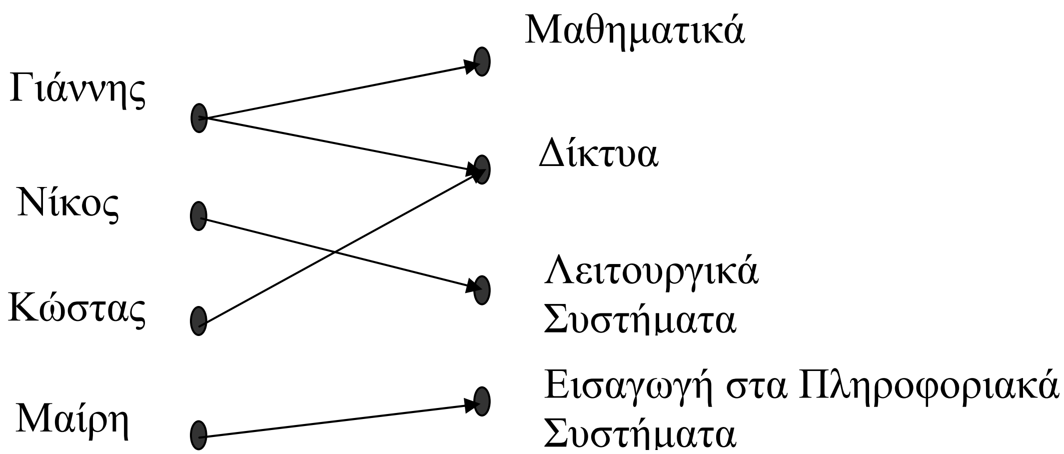
όπου χ,ψ στοιχεία του Χ.

Παράσταση διμελών σχέσεων με τη χρήση κατευθυνόμενου γραφήματος

Για την κατασκευή ενός γραφήματος που παριστά μια σχέση Σ από σύνολο Χ σε σύνολο Υ, αρχικά σημειώνουμε με τελείες (κορυφές ή κόμβους) τα στοιχεία των συνόλων Χ και Υ. Κατόπιν, για κάθε ζεύγος (χ,ψ) στην Σ, σημειώνουμε μια κατευθυνόμενη ακμή από την κορυφή χ στην κορυφή ψ.

Παράδειγμα

Η σχέση «Δήλωση» μπορεί να περιγραφεί και με το κατευθυνόμενο γράφημα:



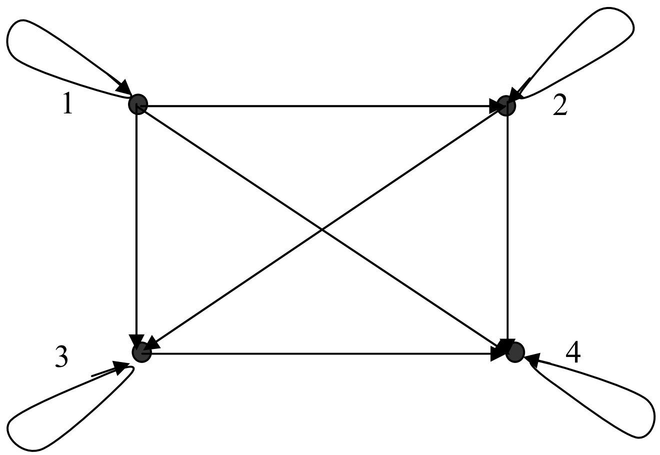
Παράδειγμα

Αν Χ={1,2,3,4}, ορίζουμε τη σχέση Σ στο Χ ως εξής

$(\chi,\psi) \in \Sigma$, αν $\chi \leq \psi$,

όπου χ,ψ στοιχεία του Χ.

Η περιγραφή της σχέσης Σ με τη μορφή κατευθυνόμενου γραφήματος είναι η εξής:



... άλλη παράσταση διμελούς σχέσης με μορφή πίνακα

(ουσιαστικά παριστούμε το γράφημα ... που παριστά τη σχέση)

κάθε γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του Χ, και κάθε στήλη του αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του Υ.
Επομένως κάθε στοιχείο (χ,ψ) του πίνακα αυτού αντιστοιχεί σε στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου Χ×Υ.

Αν (χ,ψ) στοιχείο της σχέσης Σ, τότε το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα έχει την τιμή 1.

Σε αντίθετη περίπτωση, έχει την τιμή 0.

Παράδειγμα

Η σχέση «Δήλωση», μπορεί να περιγραφεί με τη μορφή που περιγράφεται στην προηγούμενη διαφάνεια ως εξής:

	Μαθηματικά	Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα	Δίκτυα	Λειτουργικά Συστήματα
Γιάννης	1	0	1	0
Νίκος	0	0	0	1
Μαίρη	0	1	0	0
Κώστας	0	0	1	0

ν-μελής Σχέση

Μια ν-μελής σχέση Σ μεταξύ των συνόλων X_1, X_2,..., $X_ν$, ορίζεται ως υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X_1 \times X_2 \times ... \times X_ν$.

Η σχέση Σ έχει ως στοιχεία διατεταγμένες ν-άδες, η i-οστή συντεταγμένη των οποίων, $1 \le i \le ν$, είναι στοιχείο του συνόλου X_i.

Παράδειγμα

Έστω Πελάτης=$\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$ το σύνολο πελατών σε ένα τραπεζικό οργανισμό,

Δάνειο=$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}$ το σύνολο των δανείων και

Υποκατάστημα=$\{\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4\}$ το σύνολο των υποκαταστημάτων.

Η σχέση «Δανειζόμενος» περιγράφει τη σχέση μεταξύ πελατών, δανείων και των υποκαταστημάτων που παρακολουθούν τα εν'λόγω δάνεια.

Επομένως, η τριμελής σχέση «Δανειζόμενος» είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου (Πελάτης × Δάνειο × Υποκατάστημα).

Δανειζόμενος $= \{(\pi_1,\delta_2,\upsilon_1), (\pi_2,\delta_2,\upsilon_1), (\pi_3,\delta_3,\upsilon_2), (\pi_3,\delta_4,\upsilon_2)\}$

Ιδιότητες σχέσεων, αντίστροφη σχέσης και σύνθεση σχέσεων

Μια σχέση Σ καλείται **ανακλαστική (reflexive)** αν (χ,χ) ∈ Σ, για κάθε χ στο Χ.

Αυτό φαίνεται και από την παράσταση της σχέσης με κατευθυνόμενο γράφημα, αλλά
Από την παράστασή της με πίνακα.

Παραδείγματα

- Η σχέση «≤»επί του συνόλου {1,2,3,4} είναι ανακλαστική?
- Η σχέση Σ = {(α,α), (δ,δ), (β,γ), (γ,γ), (γ,β), (γ,δ), (δ,γ) } επί του συνόλου Χ={α,β,γ,δ} είναι ανακλαστική?

Ιδιότητες σχέσεων, αντίστροφη σχέσης και σύνθεση σχέσεων

Μια σχέση Σ καλείται **συμμετρική (symmetric)** αν για κάθε χ,ψ στο Χ, αν (χ,ψ) ∈ Σ, τότε και (ψ,χ) ∈ Σ .

Παραδείγματα

Η σχέση «≤» επί του συνόλου {1,2,3,4} δεν είναι συμμετρική

Η σχέση Σ = {(α,α), (δ,δ), (β,γ), (γ,γ), (γ,β), (γ,δ), (δ,γ) } επί του συνόλου Χ={α,β,γ,δ} είναι συμμετρική

Μια σχέση Σ καλείται **αντισυμμετρική (antisymmetric)** αν για κάθε χ,ψ στο Χ, αν (χ,ψ) $\in$ Σ και χ$\neq$ψ, τότε (ψ,χ) $\notin$ Σ .

Παραδείγματα

Η σχέση «$\leq$» επί του συνόλου {1,2,3,4} είναι αντισυμμετρική. Για παράδειγμα, (1$\leq$2) , 1$\neq$2 και (2,1) δεν ανήκει στη σχέση.

Η σχέση Σ = {(α,α), (δ,δ), (β,γ), (γ,γ), (γ,β), (γ,δ), (δ,γ) } επί του συνόλου Χ={α,β,γ,δ} δεν είναι αντισυμμετρική. Το ζεύγος (β,γ) αποτελεί αντιπαράδειγμα για τον ορισμό της αντισυμμετρικότητας.

Μια σχέση Σ καλείται **μεταβατική (transitive)** *αν για κάθε* χ,ψ,φ στο Χ, *αν* (χ,ψ) ∈ Σ και (ψ,φ) ∈ Σ, τότε (χ,φ)) ∈ Σ .

Παραδείγματα

Η σχέση «≤»επί του συνόλου {1,2,3,4} είναι μεταβατική. Για την επαλήθευση της ισχύος της ιδιότητας αυτής, θα πρέπει να ελεγχθούν όλα τα δυνατά ζεύγη σύμφωνα με τον ορισμό της μεταβατικότητας.

Η σχέση Σ = {(α,α), (δ,δ), (β,γ), (γ,γ), (γ,β), (γ,δ), (δ,γ) } επί του συνόλου Χ={α,β,γ,δ} δεν είναι μεταβατική. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρήστε τα ζεύγη (β,γ) και (γ,β) της σχέσης Σ. Το ζεύγος (β,β) δεν αποτελεί στοιχείο της Σ, όπως θα έπρεπε αν η Σ ήταν μεταβατική ιδιότητα.

Αν Σ σχέση από σύνολο Χ σε σύνολο Υ, η **αντίστροφη (inverse)** της Σ, συμβολίζεται $Σ^{-1}$, είναι η εξής σχέση από το Υ στο Χ:

$Σ^{-1} = \{(ψ,χ) \mid (χ,ψ) \in Σ\}$.

Παράδειγμα

Η αντίστροφη της σχέσης «≤» στο Χ={1,2,3,4} ορίζεται ως εξής:

$(ψ,χ) \in \leq^{-1}$ αν $χ \leq ψ$,

όπου χ,ψ στοιχεία του Χ.

$\leq^{-1} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,1), (3,1), (4,1), (3,2), (4,2), (4,3)\}$.

Αν $Σ_1$ σχέση από σύνολο Χ σε σύνολο Υ και $Σ_2$ σχέση από το σύνολο Υ σε σύνολο Ζ, η **σύνθεση (composition)** των $Σ_1$ και $Σ_2$, συμβολίζεται $Σ_1 \circ Σ_2$, είναι σχέση από το Χ στο Ζ που ορίζεται ως εξής:

$Σ_1 \circ Σ_2 = \{(χ,φ) \mid (χ,ψ) \in Σ_1$ και $(ψ,φ) \in Σ_2$, για κάποιο ψ στο Υ$\}$.

Παράδειγμα

Η σύνθεση των σχέσεων

Σ$_1$= *{(Γιάννης, Μαθηματικά), (Γιάννης, Δίκτυα), (Κώστας, Δίκτυα), (Νίκος, Λειτουργικά Συστήματα), (Μαίρη, Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα)}* και

Σ$_2$= *{(Μαθηματικά, 02/02|17:00), (Δίκτυα, 03/02|12:00), (Λειτουργικά Συστήματα, 04/02|17:00), (Εισαγωγή στα Πληροφοριακά Συστήματα, 05/02|12:00)},*

όπου Σ$_1$ ή σχέση «Δήλωση» και Σ$_2$ η σχέση «Εξέταση» (σχετίζει μαθήματα με την ημερομηνία και ώρα εξέτασης), είναι η σχέση

Σ1∘Σ2 = *{(Γιάννης, 02/02|17:00), (Γιάννης, 03/02|12:00), (Κώστας, 03/02|12:00), (Νίκος, 04/02|17:00), (Μαίρη, 05/02|12:00) }*

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Στο σχεσιακό μοντέλο τα δεδομένα εισάγονται με τη μορφή πίνακα. Οι πίνακες μοντελοποιούν σχέσεις.

Γενικά, ένας πίνακας έχει ν στήλες, και μοντελοποιεί μια ν-μελή σχέση μεταξύ ν συνόλων A_1, A_2,..., $A_ν$. Οι στήλες του πίνακα καλούνται ιδιώματα της σχέσης, και το πεδίο τιμών του i-οστού ιδιώματος είναι το σύνολο A_i, $1 \leq i \leq ν$.

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Παραδείγματα

Οι πελάτες ενός τραπεζικού οργανισμού παρίστανται ως ν-άδες σε ένα πίνακα ΠΕΛΑΤΗΣ με ιδιώματα ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ, ΤΗΛΕΦΩΝΟ.

Τα ιδιώματα αυτά έχουν πεδία τιμών A_1=char(20), A_2=char(20), A_3=char(10) και A_4=int(10) [1] αντίστοιχα.

Επομένως, η σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$:

ΟΝΟΜΑ	**ΕΠΩΝΥΜΟ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ**	**ΤΗΛΕΦΩΝΟ**
Μάρκος	Ελευθερίου	ΧΥ23456	1234567
Νίκος	Μάρκου	ΧΩ12345	2345677
Ελευθέριος	Μάρκου	ΓΗ56789	9876543

[1] Όπου char(ν) είναι συμβολοσειρά το πολύ ν χαρακτήρων, και int(ν) είναι ακέραιος το πολύ ν ψηφίων.

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Παραδείγματα

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και ο πίνακας ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ με ιδιώματα ΑΡΙΘΜΟΣ και ΠΟΣΟ. Τα πεδία ορισμού των ιδιωμάτων είναι char(20) και int(10) αντίστοιχα. Η σχέση ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ έχει ως εξής:

ΑΡΙΘΜΟΣ	**ΠΟΣΟ**
0987-7653543	500.000
0765-1234569	200.000
0911-9876543	20.000

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Κλειδί

Κλειδί μιας σχέσης στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων καλείται ένα σύνολο ιδιωμάτων που καθορίζει μονοσήμαντα την κάθε ν-άδα της σχέσης (δηλαδή, δεν υπάρχουν δύο ν-άδες με τις ίδιες τιμές στα ιδιώματα αυτά).

Για παράδειγμα, στη σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ, το ιδίωμα ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ μπορεί να θεωρηθεί ως κλειδί της εν'λόγω σχέσης, εφόσον δεν μπορούν να υπάρξουν δύο πελάτες με την ίδια τιμή στο πεδίο αυτό.

Με ανάλογο τρόπο, κλειδί της σχέσης ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ του ίδιου παραδείγματος, μπορεί να θεωρηθεί το ιδίωμα ΑΡΙΘΜΟΣ.

Ορίστε τη σχέση «ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ» και προσδιορίστε το κλειδί αυτής της σχέσης.

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων
Τελεστές

Ερωτήσεις:

«Να βρεθούν όλοι οι πελάτες που έχουν λογαριασμό με ποσό μεγαλύτερο από 100.000»

Απάντηση: ?

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Τελεστές

Τελεστής επιλογής

Ο τελεστής επιλογής, συμβολίζεται σ, εφαρμόζεται σε μια σχέση Σ για την επιλογή ν-άδων που πληρούν ένα κριτήριο επιλογής κ.

Συμβολίζεται με $\boldsymbol{\sigma_{\kappa}(\Sigma)}$.

Παράδειγμα

Για την επιλογή των λογαριασμών με ποσό μεγαλύτερο των 100.000, θα πρέπει να εφαρμοστεί στη σχέση ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ η επιλογή

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\text{ΠΟΣΟ}>100.000)}(\textbf{ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ})$$

Το αποτέλεσμα θα είναι μια νέα σχέση (πίνακας), έστω T, υποσύνολο της σχέσης ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ . Η νέα αυτή σχέση καθορίζεται στον πίνακα:

ΑΡΙΘΜΟΣ	**ΠΟΣΟ**
0987-7653543	500.000
0765-1234569	200.000

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Τελεστές

Τελεστής προβολής

Ο τελεστής προβολής, συμβολίζεται π, εφαρμόζεται σε μια σχέση Σ, για την επιλογή ιδιωμάτων της σχέσης αυτής.

Συμβολίζεται με $\boldsymbol{\pi_{A_{\iota 1}, A_{\iota 2}, .., A_{\iota \kappa}}(\Sigma)}$, όπου $\{A_{\iota 1}, A_{\iota 2} \ldots A_{\iota \kappa}\}$ υποσύνολο των ιδιωμάτων της σχέσης Σ.

Παράδειγμα

Για την προβολή του ονοματεπώνυμου και του τηλεφώνου των πελατών, θα πρέπει να εφαρμοστεί στη σχέση ΠΕΛΑΤΗΣ η προβολή

$\pi_{(\text{ΟΝΟΜΑ,ΕΠΩΝΥΜΟ,ΤΗΛΕΦΩΝΟ})}(\text{ΠΕΛΑΤΗΣ})$

το αποτέλεσμα της προβολής θα είναι η σχέση (πίνακας), με ιδιώματα ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΤΗΛΕΦΩΝΟ:

ΟΝΟΜΑ	ΕΠΩΝΥΜΟ	ΤΗΛΕΦΩΝΟ
Μάρκος	Ελευθερίου	1234567
Νίκος	Μάρκου	2345677
Ελευθέριος	Μάρκου	9876543

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Τελεστές

Τελεστής σύνθεσης

Ο τελεστής σύνθεσης, συμβολίζεται τ, σε αντίθεση με τους τελεστές επιλογής και προβολής, συνδυάζει τα δεδομένα από δύο σχέσεις, $Σ_1$ και $Σ_2$. Ο συνδυασμός γίνεται βάσει μιας συνθήκης κ, μεταξύ ενός ιδιώματος της $Σ_1$ και ενός ιδιώματος της $Σ_2$.

$\boldsymbol{τ_κ(Σ_1 * Σ_2)}$

Παράδειγμα

Για την εύρεση των αριθμών λογαριασμών του κάθε πελάτη, θα πρέπει να γίνει σύνθεση των σχέσεων ΠΕΛΑΤΗΣ και ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ με συνθήκη ΠΕΛΑΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ως εξής:

$\tau_{\text{ΠΕΛΑΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}(\text{ΠΕΛΑΤΗΣ*ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ})$

ΟΝΟΜΑ	**ΕΠΩΝΥΜΟ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ**	**ΤΗΛΕΦΩΝΟ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ**
Μάρκος	Ελευθερίου	ΧΥ23456	1234567	ΧΥ23456	0987-7653543
Νίκος	Μάρκου	ΧΩ12345	2345677	ΧΩ12345	0765-1234569
Ελευθέριος	Μάρκου	ΓΗ56789	9876543	ΓΗ56789	0911-9876543

Σχεσιακό Μοντέλο Δεδομένων

Τελεστές

Συνδυασμός τελεστών

Οι τελεστές μπορούν να συνδυαστούν σε σύνθετες εκφράσεις, όπως ακριβώς και οι αριθμητικοί τελεστές ή τα λογικά συνδετικά/τελεστές.

Για παράδειγμα, για την εύρεση των ονοματεπώνυμων των πελατών και των αριθμών λογαριασμών τους, θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον τελεστή προβολής.

Δηλαδή:

$\Pi_{\text{ΟΝΟΜΑ, ΕΠΩΝΥΜΟ, ΑΡΙΘΜΟΣ}}($

$\tau_{\text{ΠΕΛΑΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ=ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ.ΑΡΙΘΜΟΣ\_ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ}}$ **(ΠΕΛΑΤΗΣ*ΚΑΤΑΘΕΤΗΣ)**

$)$

Σχέσεις Μερικής και Ολικής Διάταξης

Μια σχέση επί ενός συνόλου Χ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταξινόμηση των στοιχείων του Χ.

Παράδειγμα

Θεωρείστε τη σχέση Σ=«$\subseteq$» επί του συνόλου Ρ των υποσυνόλων του {1,2,3,4}:

(χ,ψ) $\in$Σ *αν* χ$\subseteq$ψ

Η Σ είναι μια σχέση ταξινόμησης στο Ρ.

Για *παράδειγμα* το {1,2} θεωρείται «μικρότερο» του {1,2,4} εφόσον {1,2}$\subseteq${1,2,4}.

Παρατηρήστε ότι σε μια τέτοια σχέση υπάρχουν στοιχεία που δεν σχετίζονται μεταξύ τους επειδή *αυτά* δεν μπορούν να συγκριθούν. Τέτοια στοιχεία είναι για *παράδειγμα* τα {1,2} και {3,4}, εφόσον δεν ισχύει ότι {1,2}$\subseteq${3.4}, ούτε και ότι {3,4}$\subseteq${1,2}.

Μια τέτοια σχέση, καλείται σχέση μερικής διάταξης.

Μια σχέση Σ επί συνόλου Χ καλείται **σχέση μερικής διάταξης (partial order relation)**, αν αυτή είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Το σύνολο Χ με τη σχέση μερικής διάταξης Σ καλείται μερικώς διατεταγμένο σύνολο και συμβολίζεται (Χ,Σ).

Συχνά τέτοιες σχέσεις διάταξης τις συμβολίζουμε ως «≤», δηλαδή συμβολίζουμε με χ≤ψ την περίπτωση όπου (χ,ψ)∈Σ. Στην περίπτωση αυτή, το μερικώς διατεταγμένο σύνολο Χ συμβολίζεται ως (Χ, ≤).

Παράδειγμα.

Η σχέση Σ επί του συνόλου των θετικών ακεραίων

(χ,ψ) ∈Σ αν το χ διαιρεί το ψ

είναι σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο των ακεραίων

Παράδειγμα.

Η σχέση Σ επί του συνόλου των θετικών ακεραίων

$(\chi,\psi) \in \Sigma$ αν το $\chi \leq \psi$

είναι σχέση μερικής διάταξης

και....

Μια σχέση Σ επί συνόλου Χ καλείται **σχέση ολικής διάταξης (total order relation)**, αν αυτή είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική, και κάθε ζεύγος στοιχείων του Χ συγκρίνονται μέσω της Σ.

Το σύνολο Χ με τη διάταξη Σ, (Χ,Σ) καλείται ολικώς διατεταγμένο σύνολο αν η Σ είναι σχέση ολικής διάταξης στο Χ.

Παράδειγμα

Χαρακτηρίστε τη σχέση Σ επί του συνόλου Ε:

Θεωρείστε το σύνολο Ε των ενεργειών που μπορείτε να κάνετε για την αγορά φρούτων και γάλατος από ένα σούπερ-μάρκετ.

1. Εισέρχεστε στο κατάστημα
2. Παίρνετε τα φρούτα
3. Παίρνετε το γάλα
4. Πληρώνετε στο ταμείο
5. Εξέρχεστε από το κατάστημα.

Επί του συνόλου Ε ορίζεται η σχέση Σ ως εξής:

χΣψ αν η ενέργεια χ πρέπει να εκτελεστεί πριν την ενέργεια ψ.

Σχέσεις Ισοδυναμίας

Έστω Χ το σύνολο των φοιτητών ενός πανεπιστημιακού τμήματος. Κάθε φοιτητής βρίσκεται στο 1ο, 2ο, 3ο, στο 4ο ή στο 5ο έτος σπουδών. Αν διαμερίσουμε το σύνολο των φοιτητών σε πέντε σύνολα Α,Β,Γ,Δ,Ε σε αντιστοιχία με τα έτη σπουδών τους, τότε η συλλογή συνόλων φοιτητών {Α,Β,Γ,Δ,Ε} είναι μια διαμέριση του Χ.

Διαμέριση (partition) ενός συνόλου Χ καλείται μια συλλογή $\mathcal{L}$ μη κενών υποσυνόλων του Χ, τέτοια ώστε από την ένωση των συνόλων του $\mathcal{L}$ προκύπτει το Χ, και ανά δύο τα σύνολα στο $\mathcal{L}$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Δεδομένης μιας διαμέρισης $\mathscr{L}$ ενός συνόλου Χ, μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση Σ επί του συνόλου Χ ως εξής:

χΣψ αν υπάρχει σύνολο Α στην $\mathscr{L}$ τέτοιο ώστε και τα δύο στοιχεία χ,ψ ανήκουν στο Α.

Για παράδειγμα, με βάση την παραπάνω διαμέριση {Α,Β,Γ,Δ,Ε}, δύο φοιτητές σχετίζονται με μια τέτοια σχέση Σ, αν αυτοί βρίσκονται στο ίδιο έτος σπουδών.

Σχέση επί συνόλου Χ καλείται **σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation)** , αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Παράδειγμα

Έστω ένας οδικός χάρτης. Ορίζουμε επί ενός συνόλου σημείων Σ του χάρτη τη σχέση P=«υπάρχει δρόμος που τις ενώνει». Να δειχθεί ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου Σ.

Θεωρείστε ότι κάθε σημείο ενώνεται με τον εαυτό του.

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{L}$ διαμέριση ενός συνόλου Χ. Ορίζουμε σχέση Σ επί του Χ ως εξής: χΣψ, αν υπάρχει σύνολο Α στην $\mathcal{L}$ που να περιέχει και τα δύο στοιχεία χ και ψ. Η σχέση Σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο Χ.

Απόδειξη.

Για να δείξετε ότι η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας, θα πρέπει να δείξετε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική σχέση.

Έστω χ στο Χ. Από τον ορισμό της διαμέρισης, υπάρχει ένα και μοναδικό Α στην $\mathcal{L}$ που περιέχει το χ. Συνεπώς χΣχ, για κάθε χ στο Χ. Άρα η Σ είναι ανακλαστική σχέση.

Αν χΣψ, τότε από τον ορισμό της Σ, υπάρχει Α στην $\mathcal{L}$ που να περιέχει τα στοιχεία χ και ψ. Συνεπώς, ψΣχ. Δηλαδή, η Σ είναι σχέση συμμετρική.

Έστω χΣψ και ψΣφ. Τότε, από τον ορισμό της Σ, υπάρχουν A_1 και A_2 στην $\mathcal{L}$ που περιέχουν τα χ,ψ και ψ,φ αντιστοίχως. Από τον ορισμό της διαμέρισης, το ψ θα πρέπει να ανήκει ακριβώς σε ένα στοιχείο της $\mathcal{L}$. Επομένως, $A_1 = A_2$. Δηλαδή τα στοιχεία χ,ψ,φ ανήκουν στο ίδιο σύνολο $A = A_1 = A_2$. Συνεπώς, χΣφ. Άρα η σχέση Σ είναι μεταβατική.

Από τα παραπάνω, μπορείτε να συνάγετε ότι η σχέση Σ, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω, είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα

Εστω Σ σχέση ισοδυναμίας επί του Χ. Για κάθε χ στο Χ ορίσατε το σύνολο [χ]={φ∈Χ|χΣφ}. Να δειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{L}$={[χ]|χ∈Χ} αποτελεί διαμέριση του συνόλου Χ.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη του παραπάνω θα πρέπει να δείξετε ότι (α) για κάθε α στο Χ υπάρχει [χ] τέτοιο ώστε α∈[χ] και (β) αν [χ]∩[φ]≠∅ τότε [χ]=[φ].

Όσο αφορά το (α), εφόσον η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας, για κάθε α στο Χ ισχύει ότι αΣα. Συνεπώς, α∈[α].

Αν χ,φ στοιχεία του Χ με [χ]∩[φ]≠∅ και α∈[χ]∩[φ], τότε χΣα και αΣφ. Εφόσον η Σ είναι σχέση ισοδυναμίας, είναι μεταβατική σχέση. Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, ισχύει ότι χΣφ. Δηλαδή, χ∈[φ], και συνεπώς (ως δραστηριότητα, να αποδείξετε τη συνεπαγωγή αυτή), [χ]⊆ [φ]. Με παρόμοιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι [φ]⊆ [χ]. Συνεπώς, [χ]=[φ].